

VIII РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа.
Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. (МЛ 52/4) Означимо написане бројеве са x_1, x_2, \dots, x_n и са $S = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ њихов збир. Из услова задатка следи да је $S = x_1 + 9x_1 = 10x_1$, и слично $S = 10x_2, \dots, S = 10x_n$ [10 бодова]. Дакле, сви написани бројеви су једнаки међу собом (и једнаки су десетини њиховог збира), што значи да их има 10 [10 бодова].

2. Како је $\left| \frac{2n+1}{3n-1} \right| < 1$, тј. $-1 < \frac{2n+1}{3n-1} < 1$ за $n \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ [13 бодова] и како је

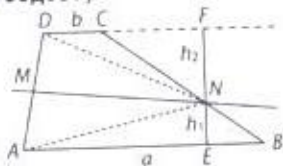
$\frac{2n+1}{3n-1} = 0$ за $n = -\frac{1}{2}$, то разломак може бити цео број само за $n \in \{0, 1, 2\}$ [2 бода].

Заменом ових вредности у разломку добијамо да су $n = 0$ и $n = 2$ једини цели бројеви за које је вредност разломка цео број [5 бодова].

3. Странице квадрата у основама су 10cm. Означимо висину призме са H_1 , а висину пирамиде са H_2 . Из једнакости основа и запремина следи да је $H_2 = 3H_1$ [5 бодова]. Из једнакости површина имамо да је $2 \cdot 100 + 4 \cdot 10 \cdot H_1 = 100 + 2 \cdot 10 \cdot \sqrt{H_1^2 + 25}$.

односно $5 + 2H_1 = \sqrt{H_1^2 + 25}$ [8 бодова]. Заменом $H_2 = 3H_1$ и решавањем ове једначине добијамо да је $H_1 = 4\text{cm}$ и $H_2 = 12\text{cm}$ [7 бодова].

4. Троуглови AMN и DMN имају једнаке површине, јер је MN тежишна дуж троугла AND . Како четвороуглови $ABNM$ и $CDMN$ имају једнаке површине, то и троуглови ABN и CDN имају једнаке површине [7 бодова]. Нека су E и F подножја нормала из N на AB и CD . Дужи $NE = h_1$ и $NF = h_2$ су висине троуглова ABN и CDN , које одговарају страницама $AB = a$ и $CD = b$, па из једнакости површина следи $a \cdot \frac{h_1}{2} = b \cdot \frac{h_2}{2}$, одакле је $h_1 : h_2 = b : a$ [7 бодова]. Талесовом теоремом се добија да је тражени однос $BN : NC = NE : NF = h_1 : h_2 = b : a$ [6 бодова].



5. Ако се $\frac{n(n+1)}{2}$ завршава са 18, онда се $n(n+1)$ завршава са 36. Последња цифра

6 производа $n(n+1)$ може се добити само ако се n завршава са 2 или 7 [8 бодова]. Ако је $n = 10x + 2$, онда је $n(n+1) = (10x+2)(10x+3) = 100x^2 + 50x + 6$, па се тај број завршава или са 06 или са 56 [6 бодова].

Ако је $n = 10x + 7$, онда је $n(n+1) = (10x+7)(10x+8) = 100x^2 + 150x + 56$, па се тај број завршава или са 56 или са 06 [6 бодова]. Производ $n(n+1)$ се не завршава са 36.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике
ученика основних школа
25.03.2018.

VII разред

- Нека је H ортоцентар и O центар описане кружнице оштроуглог троугла ABC . Нека је тачка M други пресек праве одређене тачкама A и O са описаном кружницом. Докажи да троуглови BCM и BCN имају једнаке површине.
- Да ли је број $\sqrt{3-2\sqrt{2}} + \sqrt{5-2\sqrt{6}} + \sqrt{7-2\sqrt{12}}$ рационалан?
- а) Колико делилаца у скупу природних бројева има број $2^3 \cdot 4^5 \cdot 6^7$?
б) Колико међу тим делиоцима има оних који су куб неког природног броја?
- Дат је конвексан четвороугао са нормалним дијагоналама. Да ли обавезно постоји конвексан четвороугао са бар два права унутрашња угла, чије су странице (у неком поретку) једнаке страницама датог четвороугла?
- Последња цифра броја $n^2 + 2n$ је 4 (n је природан број). Одреди претпоследњу цифру (цифру десетица) тог броја.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

Изrada задатака траје 150 минута.

Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.